Prova scritta di Fisica 2 10.9.2013

Esercizio n.1 [10 punti]

Sia definito il vettore spostamento elettrico $\overline{\boldsymbol{D}}$ in coordinate cilindriche (ρ, φ, z) $\overline{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\rho}^2 + \boldsymbol{z}^2)^{-3/2} \cdot (\overline{\boldsymbol{\rho}} + \overline{\boldsymbol{z}})$. Scrivere l'espressione della densità spaziale della carica elettrica, ***b*** essendo una costante maggiore di zero.

Soluzione

La densità della carica elettrica ρ_c si può ricavare dalla relazione $div\ \overline{D} = \rho_c$. In questo caso $\overline{\boldsymbol{D}}$ viene fornito in coordinate cilindriche, quindi va calcolata la divergenza in queste coordinate:

$\rho_c = div\ \overline{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho D_\rho\right) + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$. Per $[\rho, z\ \neq 0]$ il calcolo fornisce: $\rho_c = 0$.

Esercizio n.2 [9 punti]

Un protone è fisso in una certa posizione dello spazio, e un elettrone ruota intorno ad esso, con velocità angolare costante, secondo una traiettoria circolare di raggio r. Calcolare il valore del campo magnetico nella posizione in cui si trova il protone.

Dati: r=0,035 nm.

Soluzione

Il campo magnetico generato dall'elettrone è equivalente a quello di una spira circolare attraversata dalla corrente I; questa corrente, quindi, è quella relativa all'elettrone che compie un moto circolare uniforme intorno al protone.

Si ha quindi $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r}$; $I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}$; $F_e = k\left(\frac{e}{r}\right)^2 = m\,\omega^2 r$, dove la forza centripeta che mantiene l'elettrone sull'orbita è l'attrazione elettrostatica, $k = 1/4\pi\epsilon_0$, ***e*** ed ***m*** sono la carica e la massa dell'elettrone.

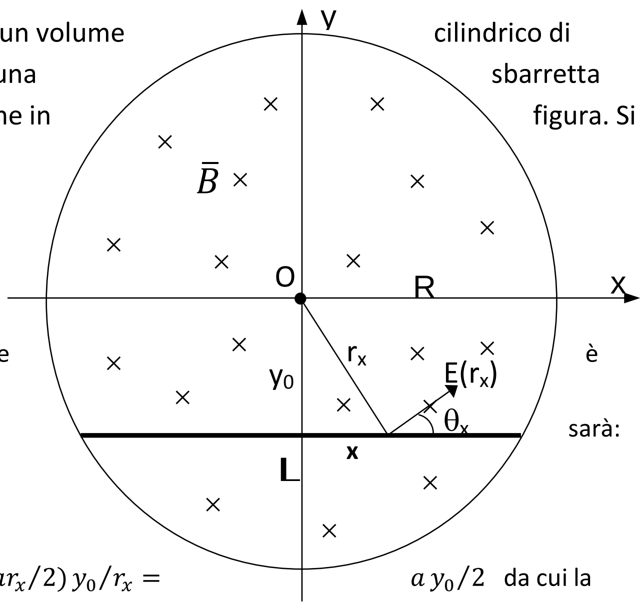
Il campo B_0 risulta quindi:

$$B_0 = \frac{\mu_0\, e^2}{4\pi r}\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \cong 35\ T$$

Esercizio n.3 **[11 punti]**

Si consideri un campo Magnetico $\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\,\hat{\boldsymbol{z}}$ confinato in un volume cilindrico di raggio **R** e parallelo all'asse del cilindro. Si consideri inoltre una sbarretta metallica, di sezione trascurabile e lunghezza **L** disposta come in figura. Si calcoli la d.d.p. esistente fra gli estremi della sbarretta.

Dati: a= 0,1 T/s ; R= 20 cm ; L=30 cm



Soluzione

La differenza di potenziale va calcolata integrando la componente x del campo elettrico indotto fra i due estremi della sbarretta. Il campo Elettrico indotto, che per simmetria deve è tangenziale alle circonferenze con centro in "O", si può calcolare tenendo conto che la forza e.m. indotta su queste circonferenze sarà:

$f_i(r_x) = -\,d\phi/dt = -\,d(\pi r_x{}^2 B(t))/dt = -\,\pi r_x{}^2 a$

$f_i(r_x) = \oint E(r_x)dx = 2\pi r_x E(r_x)$, da cui si ha $E(r_x) = a r_x/2$

La componente di E sull'asse x sarà: $E_x(r_x) = (a r_x/2)\cos\theta_x = (a r_x/2)\, y_0/r_x = a\, y_0/2$ da cui la d.d.p. su tutta la lunghezza L sarà:

$$\Delta V = \int_0^L E_x\, dx = \frac{L a y_0}{2} = \frac{La}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \cong 2\ mV$$